УДК 532.256.2

Моделювання пристінного пограничного шару з зовнішнім збуренням

Дмитрів В. Т.; Дмитрів Т. В.
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

Для вирішення задач проектування систем, що працюють в Ньютонівських середовищах в режимі обтікання поверхонь, необхідно знати характеристики руху середовищ на поверхнях обтікання. Це дозволить розрахувати втрати енергії на транспортування середовищ та силові характеристик переміщення об'єктів таких середовищах. Середовище обтікання прийнято Ньютонівським. Для універсальності результатів моделювання швидкості по товщині ламінарного пограничного шару і дотичних напружень на поверхні обтікання, проведено у відносних параметрах. Співвідношення товщини пограничного шару ***y/δ*** *взято в межах ≈0…1, відношення швидкостей на межі і в пограничному шарі –* $\boldsymbol{v_x/v_o}$ *= 0…1, число Маха за умови ламінарного пограничного шару - 0,0001…0,1. Отримано розподіл швидкості по товщині пограничного шару і дотичні напруження.*

Ключові слова: пограничний шар; число Маха; швидкість; поверхня обтікання; рівняння Навьє-Стокса

Дослідження характеристик пограничного шару на поверхнях обтікання, які підпорядковуються законам Ньютона (Ньютонівські середовища) є актуальним завданням для різних сфер приладобудування та задач прикладної механіки. Критерієм оцінки є дотичні напруження і розподіл швидкості в пограничному шарі, що безпосередньо впливає на втрати енергії (втрати тиску) при руху об'єкту в середовищі.

Розглядається поверхня обтікання у вигляді площини твердого покриття, непроникної (рис.1). Швидкість потоку $\boldsymbol{v_0}$ є сталою на інтервалі часу $\boldsymbol{t}$. На самій поверхні пластини швидкість потоку рівна «нулю»: $\boldsymbol{v_0} = 0$ за $\boldsymbol{y} = 0$. Товщину пограничного шару умовно позначимо $\boldsymbol{\delta}$. Вісь $\boldsymbol{X}$ паралельна поверхні і співнапрямлена з напрямком вектора обтікання поверхні середовищем. Вісь $\boldsymbol{Y}$ перпендикулярна до поверхні обтікання. В пограничному шарі буде справедлива умова:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0 \text{ за } y < \delta \ ,$$

і зовнішній потік, де

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \, , v_x = v_o \text{ поза шаром } y \geq \delta \, .$$

В пограничному шарі сили, які виникають із-за в'язкості середовища обтікання і сили інерції є співрозмірними.

Розглянемо рух середовища на поверхні обтікання тільки в одному напрямку ординати $\boldsymbol{X}$. Рівняння руху середовища обтікання і нерозривності потоку будуть мати вигляд

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \ ; \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Рівняння дотичних напружень має вигляд загально відомий

$$\tau_{\text{тер}} = \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \, . \tag{3}$$

Диференціюємо рівняння (3), попередньо поділивши його на $\boldsymbol{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_{\text{тер}}}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \, . \tag{4}$$

Інтеграл рівняння (4), після раду перетворень і інтегрувань, буде мати вигляд

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \int_0^\delta \big(v_x \cdot (v_0 - v_x)\big) \cdot dy \ = \tau_{\text{тер.С}} \,, \qquad (5)$$

де $\boldsymbol{v_0}$ – швидкість на межі пограничного шару, за умови $\boldsymbol{y} = 0$.

Для розв'язку рівняння (5) задаємо функцію розподілу швидкості у пограничному шарі на площині обтікання. Вважаємо, що швидкість, за ламінарного режиму руху обтікання площинної поверхні, в пограничному шарі змінюється по траєкторії (рис.), яку можна описати кубічним рівнянням.

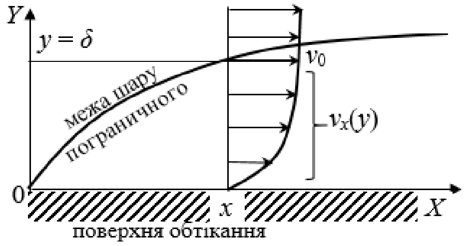

Рис.1. Розподіл швидкостей на поверхні обтікання за ламінарного пограничного шару

Тоді:

$$v_x = a + b \cdot y + c \cdot y^2 + m \cdot y^3 \,. \qquad (6)$$

Коефіцієнти $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{m}$ визначаємо із граничних умов:

1) на поверхні площини обтікання: $\boldsymbol{y} = 0$, $\boldsymbol{v_x} = 0$, підставляємо у рівняння (13), отримуємо, що $\boldsymbol{a} = 0$;

2) за $\boldsymbol{y} = 0$, $\boldsymbol{v_x} = 0$, $\boldsymbol{v_y} = 0$, відповідно $\partial^2 v_x / \partial y^2 = 0$;

Диференціюємо два рази рівняння (13)

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = b + 2c \cdot y + 3m \cdot y^2 \,;$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 2c + 6m \cdot y = 0, \Longrightarrow c = 0.$$

Тоді з рівняння (6) отримаємо за $\boldsymbol{a} = 0$ і $\boldsymbol{c} = 0$:

$$v_x = b \cdot y + m \cdot y^3 \,. \qquad (7)$$

Врахуємо початкові умови:

1) $\boldsymbol{y} = 0$, $\boldsymbol{v_x} = 0$, $\partial v_x / \partial y = 0$:

$$b + 3m \cdot y^2 = 0, b = -3m \cdot y^2;$$

2) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{v_x} = \boldsymbol{v_0}$:

$$v_0 = -3m \cdot \delta^3 + m \cdot \delta^3 \,, b = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0}{\delta}.$$

Враховуючи рівняння (5) і результати опрацювання кубічного рівняння, після інтегрування отримаємо залежність для моделювання швидкості ламінарного пограничного шару за умови, що градієнт тиску на поверхні обтікання наближається до «нуля»:

$$v_x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{1{,}231 \cdot \delta}{y + \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{y^2}}} \,. \qquad (8)$$

Для розроблення аналітичної моделі дотичного напруження на в ламінарному пограничному шарі на поверхні обтікання візьмем диференціал першого порядку виразу (8):

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{1{,}231}{\delta} \cdot \frac{{v_0}^2}{v_x} \cdot \frac{\frac{\delta}{3} \cdot \left(\frac{y}{3\delta^2 - y^2} + \frac{1}{y} \right) - 1}{\left(\frac{y}{\delta} + \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{\gamma^2} \right)^2} . \tag{9}$$

Враховуючи рівняння (9) і (3), дотичні напруження будуть визначатись залежністю:

$$\tau_{\text{тер}} = \mu \cdot \frac{1{,}231}{\delta} \cdot \frac{{v_0}^2}{v_x} \cdot \frac{\frac{\delta}{3} \cdot \left(\frac{y}{3\delta^2 - y^2} + \frac{1}{y} \right) - 1}{\left(\frac{y}{\delta} + \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{3\delta^2 - y^2}{\gamma^2} \right)^2}, \tag{10}$$

де $\boldsymbol{\tau_{\text{тер}}}$ – дотичні напруження на поверхні обтікання в ламінарному пограничному шарі, Н/м^2; $\boldsymbol{\mu}$ – динамічна в'язкість середовища обтікання, Н·с/м^2; $\boldsymbol{v_0}$ – швидкість потоку середовища обтікання на зовнішній межі пограничного шару, м/с; $\boldsymbol{v_x}$ – швидкість середовища обтікання по висоті пограничного шару, м/с; $\boldsymbol{\delta}$ – товщина пограничного шару, м; $\boldsymbol{y}$ – координата товщини пограничного шару, м.

Проведено моделювання швидкості по висоті ламінарного пограничного шару і дотичних напружень на поверхні обтікання у відносних параметрах. Для врахування співвідношення товщини пограничного шару і координати $\boldsymbol{y}$ приймемо відношення $\boldsymbol{y/\delta}$ в межах $\boldsymbol{y/\delta} = \approx 0\ldots1$, відношення швидкостей на межі і по товщині пограничного шару – $\boldsymbol{v_x / v_0} = 0\ldots1$, число Маха за умови ламінарного пограничного шару - **М** = 0,0001…0,1.

Моделювання проводили для повітря за стандартних умов: тиск на поверхні обтікання Р = 100 кПа, температура повітря 20 $^{\text{O}}$С, густина повітря ρ = 1,29 кг/м^3; динамічні в'язкості повітря μ = 18,6 мкПа·с. Поверхня обтікання є площинною, градієнт тиску на поверхні обтікання приймали рівним «нулю».

Аналіз результатів моделювання показує, що на віддалі від поверхні обтікання в межах до 20 зм швидкість повітря є на межі ≈0. Дотичні напруження (рис.3) на віддалі 10…20 зм від поверхні обтікання становлять від 704,4 ППа …704,4 ЕПА за чисел Маха М = 0,0001…0,1 до 124,2 ГПа…14,22 ТПа. Після товщини пограничного шару 21 зм дотичні напруження знижуються не лінійно і на віддалі 0,3475·$\boldsymbol{\delta}$ наближаються до «нуля».

Для визначення ефективності взаємодії поверхонь обтікання з пристінними пограничними шарами за вимушеної турбулентності потоків повітря для моделювання, що уможливить адекватне відображення зовнішніх збурень на пристінний пограничний шар, пропонується система диференціальних рівнянь у вигляді:

- диференціального рівняння енергії:

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right)(2\pi\rho CA) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(k + k_T)\frac{dA}{dt} \right] + (\mu + \mu_T)\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u\frac{dp}{dx} + \omega_v; \tag{11}$$

- диференціального рівняння руху:

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right)\rho = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_T)\frac{\partial u}{\partial y} \right] + S_v; \tag{12}$$

- диференціального рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0\ ; \tag{13}$$

- рівняння стану:

$$\rho = p/(RT), \tag{14}$$

де *x, y* – повздовжня і вертикальна координати відповідно, м; *u, v* – повздовжня і поперечна швидкості повітря відповідно, м/с; ν – частота хвилі збурення, с$^{-1}$; ρ – густина повітря, кг/м^3; C – швидкість розповсюдження хвилі, м/с; A – амплітуда збурення, м; k – коефіцієнт пружності повітря, Па; k_T – коефіцієнт турбулентного переносу кількості пружності, Па; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості, Па·с; μ_T – коефіцієнт турбулентного переносу кількості руху, Па·с; ω_ν, S_ν – члени, що характеризують інтенсивність внутрішніх енергії коливання, Н·м/(с·м^3) і кількості руху, Н/м^3, відповідно; p – тиск потоку, Па; R – газова стала, Дж/(кг·К); T – температура потоку, К.

В основі запропонованої системи рівнянь є рівняння пограничного шару, запропоновані Л. Прандтлем, отримані в ході спрощення диференціальних рівнянь Навьє-Стокса. Для збурення запропоновано застосувати надходження енергії від прикладених коливань в заданому частотному діапазоні.

З математичної точки зору такий підхід уможливлює спростити задачу, розділивши потік й розглядати тільки динамічний пограничний шар.

Приведена задача і її математичне формулювання системо рівнянь (11 – 14) є незамкнутою із-за невизначеності величин коефіцієнтів турбулентного переносу кількості руху μ_T і турбулентного переносу кількості пружності k_T.

Запропонована математична модель впливу на пограничний пристінний шар збуренням за рахунок надходження енергії від прикладених коливань в заданому частотному діапазоні уможливлює аналітично дослідити характер зміни швидкості потоку повітря на обтічній поверхні в пристінному пограничному шарі.

Modeling of a near-wall boundary layer with external perturbation

Dmytriv Vasyl, Dmytriv Taras

To solve the problems of designing systems that operate in Newtonian medium in the mode of streamlined surfaces, it is necessary to determine the characteristics of the motion of such medium on the streamlined surfaces. This will allow you to calculate the energy loss for the transportation of environments, as well as the power characteristics of the movement of objects in such environments. The flow environment is adopted by Newtonian. For the universality of results of modeling of speed over a height of a laminar boundary layer and tangential stresses on a streamlined surface, it is carried out in relative parameters. The ratio of the thickness of the boundary layer y/δ is taken within ≈0…1, the ratio of velocities at the boundary and in the boundary layer is – vx /vo = 0…1, the Mach number under the condition of the laminar boundary layer is - 0,0001…0,1. As a result of the simulation, the velocity distribution over the thickness of the boundary layer and tangential stresses are obtained.

Keywords: boundary layer; Mach number; velocity; flow surface; Navier-Stokes equation