УДК 533.6.011.6

Термодинамічні методи аналізу течій з урахуванням необоротності процесів

Турик В. М.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Показано, що зміна повної енергії потоків суцільного середовища в часі містить не тільки зміну внутрішньої енергії за рахунок «внутрішнього» і «зовнішнього» теплообміну (з урахуванням розсіювання), але й подвійний вплив як дисипативної частини потужності сил в'язкого тертя, так і недисипативної частки механічної потужності, що витрачається на деформацію об'ємів середовища під дією тиску. Крім того, зміна в часі кінетичної енергії рідини відбувається за рахунок не тільки масових сил, але й за рахунок як другої недисипативної частки механічної потужності сил незрівноваженого гідродинамічного тиску на переміщення елементів середовища, так і недисипативної частини потужності сил в'язкого тертя, що відповідає за формування того чи іншого розподілу кінетичної енергії між елементарними об'ємами рідини, тобто формування профілів швидкості в потоках. В якості прикладу оцінено дисипацію механічної енергії в ламінарних потоках рідини, а також наведено приклад розв'язання задачі за допомогою варіаційного підходу термодинаміки незворотних процесів.

Ключові слова: дисипація; недисипативна частка механічної потужності; розподіл кінетичної енергії; «погонний» тепловий потік; варіаційна постановка задачі

Багаторічна практика викладання дисциплін гідромеханічного профілю для машинобудівних спеціальностей, зокрема в ННММІ, («Машинобудівна гідравліка», «Прикладна гідромеханіка» тощо і навіть дисципліна більш загальної назви «Механіка рідини і газу», передбачувана освітньо-професійною програмою бакалаврського рівня вищої освіти за спеціальністю 131 — Прикладна механіка) свідчить про домінування в навчальних методиках і в базових знаннях студентів і аспірантів здебільшого гідравлічних уявлень про закономірності течії нестисливих і стисливих рідин, які базуються, головним чином, на одновимірних передумовах та передбачають широке застосування спрощених і емпіричних методів. Таке положення є часто корисним і виправданим суто інженерною спрямованістю підходів до розв'язання практичних задач течії рідин в трактах технічних пристроїв. У випадках необхідності розрахунків і аналізу картин течії більш складного характеру найчастіше використовуються готові програмні пакети (які, на жаль, часто створюють ілюзію необов'язковості більш глибокого розуміння фізики течії, особливо при певному дефіциті фундаментальної підготовки дослідника, впевненого, що «програма все враховує»). В результаті стикаємося з впевненістю багатьох студентів, аспірантів і фахівців-практиків, що, наприклад, робота потоків проти сил тертя повністю перетворюється в теплоту і дисипує. В якості підтверджуючого аргументу існує спокуса звернення до відомої в теорії турбулентності ідеї Річардсона про прямий каскад переносу механічної енергії від великомасштабних вихорів до більш дрібних вихорів аж до вихорів, згодом названих вихорами колмогорівських масштабів, функція яких і полягає в дисипації енергії, тобто перетворення її в теплоту, яка розсіюється в оточуючому середовищі. Але треба усвідомлювати, що такий схематизований підхід до пояснення механізму переносу енергії турбулентності для доступного на середину XX сторіччя аналізу еволюції процесів, яка призводить до рівноважного стану, може бути справедливим лише для фізичних зовні замкнених систем. Рівноважному стану з максимальним ступенем хаотичності дійсно відповідає максимальне значення ентропії, що дає підстави говорити про деградацію енергії при прийнятті схеми утворення колмогорівських вихорів з повною дисипацією енергії. Однак, як показують дослідження І. Пригожина, Г. Хакена, В. Ебелінга, М. Шредера та інш. в термодинаміці відкритих нерівноважних нелінійних систем [1, 2], до яких відносяться потоки рідин і газів, поряд з деградацією енергії відбувається самоорганізація процесів і структур.

Виявляється, до деяких питань самоорганізації у відкритих системах можна підійти і з класичних термодинамічних позицій, що використовуються в механіці рідини і газу.

Закон збереження енергії для довільного об’єму стисливого середовища *V(t)*, який при своєму русі може деформуватися з часом, зберігаючи масу незмінною, за загальним методом Лагранжа має вигляд

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} \rho e dV = N + Q, \tag{1}$$

де ρ – густина, *кг/м*^{3}; $e = u + \dfrac{\upsilon^2}{2}$ – повна енергія одиниці маси рідини, *Дж/кг* (u – питома внутрішня енергія, υ – швидкість, *м/с*); N – потужність масових і поверхневих сил; Q – тепловий потік, *Вт*.

Взяття похідної від інтегралу по змінному об’єму в’язкого середовища у виразі (1) фактично забезпечує перехід до фіксованого об’єму V, який обмежений поверхнею S. З урахуванням рівняння нерозривності такий перехід призводить до

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{V(t)} \rho e dV = \iiint\limits_{V}\left[\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + div(\rho e\vec{\upsilon})\right]dV = \iiint\limits_{V}\rho\frac{de}{dt}dV = N + Q. \tag{2}$$

Підстановка величин $N = \int\limits_V \rho\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}dV + \oint\limits_S \vec{p}_n\cdot\vec{\upsilon}dS$ і $Q = -\oint\limits_S \vec{q}\cdot\vec{n}^o dS + \int\limits_V \rho q_v dV$ в

рівняння (2) дає інтегральну форму рівняння збереження енергії:

$$\iiint\limits_{V(t)} \rho\frac{d}{dt}\left(u + \frac{\upsilon^2}{2}\right)dV = \iiint\limits_{V}\rho\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}dV + \oiint\limits_{S}\vec{p}_n\cdot\vec{\upsilon}dS - \oiint\limits_{S}\vec{q}\cdot\vec{n}^o dS + \iiint\limits_{V}\rho q_v dV, \tag{3}$$

де $\vec{F}$ – головний вектор напруження масових сил, *Н/кг*; $\vec{p}_n$ – головний вектор напруження поверхневих сил, *Па*; $\vec{q}$ – щільність теплового потоку, підведеного до газу ззовні теплопровідністю, конвекцією і випромінюванням, *Вт/м*^{2}; $\vec{n}^o$ – орт зовнішньої нормалі до площинки dS; q_v – питомий тепловий потік від внутрішніх джерел теплоти, *Вт/кг*.

Згідно з формулою Коші та правилом множення тензора напружень $\mathbf{P}$ на вектор зліва маємо

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x\cos(n,x) + \vec{p}_y\cos(n,y) + \vec{p}_z\cos(n,z) = \vec{n}^o\mathbf{P}. \tag{4}$$

Враховуючи вираз (4), другий і третій інтеграли правої частини рівняння (3), при застосуванні властивості асоціативності скалярного добутку та теореми Гаусса-Остроградського, набувають вигляду:

$$\oiint\limits_{S}\vec{p}_n\cdot\vec{\upsilon}dS = \oiint\limits_{S}\vec{n}^0\cdot(\mathbf{P}\vec{\upsilon})dS = \iiint\limits_{V}div(\mathbf{P}\vec{\upsilon})dV, \quad \oiint\limits_{S}\vec{q}\cdot\vec{n}^o dS = \iiint\limits_{V}div\vec{q}dV,$$

де $(\mathbf{P}\vec{\upsilon})$ означає скалярний добуток тензора $\mathbf{P}$ на вектор $\vec{\upsilon}$ справа.

Тоді інтегральному рівнянню енергії (3), яке справджується для будь-якого довільного фіксованого об'єму рідини, відповідатиме диференціальне рівняння енергії

$$\rho\frac{d}{dt}\left(u+\frac{\upsilon^2}{2}\right)=\rho\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}+div\left(\mathbf{P}\cdot\vec{\upsilon}\right)-div\vec{q}+\rho\vec{q}\ . \tag{5}$$

Це рівняння, з огляду на дистрибутивність скалярного множення векторів, може бути зведене до наступного:

$$\left[\rho\frac{du}{dt}-\left(\vec{p}_x\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x}+\vec{p}_y\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial y}+\vec{p}_z\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial z}\right)+div\vec{q}-\rho q_v\right]+$$
$$+\left\{\rho\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\rho\vec{F}-\left(\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}\right)\right\}\cdot\vec{\upsilon}=0. \tag{6}$$

Очевидно, вираз у фігурних дужках тотожно дорівнює нулю, тому на підставі виразу в квадратних дужках можна записати

$$\rho\frac{du}{dt}=\vec{p}_x\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial x}+\vec{p}_y\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial y}+\vec{p}_z\cdot\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial z}-div\vec{q}+\rho q_v\,.$$

Враховуючи лінійний зв'язок тензорів напружень і швидкостей деформацій відповідно до узагальненої гіпотези Ньютона, це рівняння перетворюється до вигляду

$$\rho\frac{du}{dt}=-p\,div\vec{\upsilon}-div\vec{q}+\rho q_v+\mu D\,, \tag{7}$$

де μD – дисипативна функція як функція розподілу швидкості поблизу даної точки: $\mu D=\mu\left[-\frac{2}{3}\left(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}\right)^2+2\left(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yy}^2+\varepsilon_{zz}^2\right)+4\left(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2\right)\right]$, така, що характеризує зведену до одиниці об'єму рідини частину потужності сил в'язкості, яка перетворюється в тепловий потік розсіювання в об'ємі рідини; члени $\varepsilon_{ij}\ \left(i,j=x,y,z\right)$ є компонентами тензора швидкостей деформацій. Оскільки рівняння (7) кількісно пов'язує відповідно частину роботи сил тиску, зовнішню та внутрішню теплоту зі зміною внутрішньої енергії рідини, його можна вважати **рівнянням термодинамічного закону збереження енергії.**

Величина $div\vec{\upsilon}=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}$ відображає швидкість відносної зміни елементарного об'єму рідини $\frac{1}{\Delta V}\frac{d}{dt}\Delta V$, що містить точку, у якій визначене розходження вектору швидкості. Таким чином, з рівняння (7) випливає, що на зміну внутрішньої енергії рідини крім теплових процесів впливає механічний фактор – частка недисипативної секундної роботи деформації елементарних об'ємів за одиницю часу $\left(-p\,div\vec{\upsilon}\right)$ під дією тиску *p*. Другу частину недисипативної потужності сил тиску можна отримати, проаналізувавши скалярний добуток другої половини рівняння (6) з використанням узагальненої гіпотези Ньютона:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\upsilon}^2}{2}\right)=\rho\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}-\left(\vec{\upsilon},grad\,p\right)+\mu\vec{\upsilon}\cdot\left(\Delta\vec{\upsilon}+\frac{1}{3}grad\,div\,\vec{\upsilon}\right). \tag{8}$$

Рівняння (8) показує, що секундна зміна кінетичної енергії одиниці об'єму рідини відбувається за рахунок дії відповідно: потужності масових сил, секундної роботи переміщення елемента рідини $-\left(\vec{\upsilon},grad\,p\right)$ під дією незрівноваженого гідродинамічного тиску (друга частка потужності сил тиску; знак мінус пояснюється спрямуванням тиску всередину об'єму рідини), а також потужності сил в'язкості $\mu\vec{\upsilon}\cdot\left(\Delta\vec{\upsilon}+\frac{1}{3}grad\,div\vec{\upsilon}\right)$ по захопленню та переміщенню елемента рідини як цілого. Останній доданок можна вважати **недисипативною частиною потужності сил в'язкого тертя**, тобто суто механічного ефекту використання певної долі енергії потоку для формування того чи іншого розподілу кінетичної енергії між окремими елементарними об'ємами рідини, а отже, для формування профілів швидкості в каналах та вільних струменях.

Пам'ятаємо, що енергетичні перетворення в рівняннях (7) і (8) слід розглядати сукупно, оскільки вони породжені більш загальним рівнянням (6) і є його складовими частинами. На підставі рівнянь (7) і (8), а також співвідношення щодо потужності сил тиску, яке має місце також в диференціальному рівнянні енергії для нев'язкого стисливого середовища

$$div\left(p\vec{\upsilon}\right)=pdiv\vec{\upsilon}+\left(\vec{\upsilon},grad\,p\right),$$

повне рівняння енергії (6) набуває вигляду

$$\rho\frac{d}{dt}\left(u+\frac{\upsilon^2}{2}\right)=\rho\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}-div\left(p\vec{\upsilon}\right)+\mu\vec{\upsilon}\cdot\left(\Delta\vec{\upsilon}+\frac{1}{3}grad\,div\vec{\upsilon}\right)+\mu D-div\,\vec{q}+\rho q_v\,. \quad (9)$$

Отже, як ми переконалися, загальне рівняння збереження енергії (9) містить як дисипативну, так і недисипативну частини потужності сил в'язкого тертя. Перша частина обумовлює теплоту «внутрішнього» теплообміну в результаті незворотних втрат термодинамічної роботи потоку, яка витрачається на роботу тертя. В якості прикладу показано, що «погонний» тепловий потік дисипації механічної енергії в ламінарних потоках рідини в круглоциліндричних каналах і каналах прямокутного поперечного перерізу пропорціональний квадрату середньої швидкості, а в трубах круглого перерізу він не залежить від радіусу труб. Також наведено приклад варіаційного методу термодинаміки незворотних процесів для розв'язання задачі ламінарної течії.

Список літератури

1. Prigogine I., Kondepudi D. Modern Thermodynamics. 2nd Edition. New York. J. Wiley & Sons, 2014. 560 p.
2. В. Й. Сугаков. Основи синергетики. Київ: Обереги, 2001. 287 с.

Thermodynamic methods of flow analysis taking into account the irreversibility of processes

Turyk Volodymyr

It is shown that the change in the total energy of flows of a continuous medium in time includes not only the change in internal energy due to "internal" and "external" heat exchange (taking into account dissipation), but also the dual effect of both the dissipative part of the power of viscous friction forces and the non-dissipative part of the mechanical power spent on the deformation of the volumes of the medium under the action of pressure. In addition, the change in the kinetic energy of the fluid in time occurs due not only to mass forces, but also due to both the second non-dissipative part of the mechanical power of the forces of unbalanced hydrodynamic pressure on the movement of the elements of the medium, and the non-dissipative part of the power of viscous friction forces, which is responsible for the formation of a particular distribution of kinetic energy between elementary volumes of the fluid, i.e. the formation of velocity profiles in the flows. As an example, the dissipation of mechanical energy in laminar fluid flows is evaluated, and an example of solving the problem using the variational approach of thermodynamics of irreversible processes is also given.

Keywords: dissipation; non-dissipative share of mechanical power; distribution of kinetic energy; "running" heat flow; variational formulation of the problem