УДК 621.87

Аналіз стійкості математичних моделей вантажопідйомних машин

Нєженцев О.Б. к.т.н., доц.
КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

Анотація: *Розроблено методику і проведено дослідження стійкості математичних моделей, що описують рух вантажопідйомних машин. Розглянуто тримасову і чотиримасову динамічні моделі мостових кранів, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Вказані моделі застосовуються для аналізу і синтезу перехідних процесів вантажопідйомних машин. Дослідження стійкості математичних моделей здійснювалося за допомогою критерію Гурвіца після лінеаризації зведеної сили приводу пересування вантажопідйомного крана. Наведено результати перевірки стійкості три- та чотиримасових моделей, що описують рух мостового крана вантажопідйомністю 20 т.*

Ключові слова: *вантажопідйомна машина, мостовий кран, математична модель, чисельний метод інтегрування, стійкість математичних моделей, критерій Гурвіца*

Перехідні процеси вантажопідйомних машин досліджуються зазвичай за допомогою багатомасових динамічних моделей [1-4 та ін.], що описуються нелінійними диференціальними рівняннями, інтегрування яких виконується чисельними методами.

Результати досліджень перехідних процесів кранів показують, що при певних значеннях коефіцієнтів диференціальних рівнянь мають місце нестійкі результати чисельного інтегрування (наприклад, безперервно зростаючі коливання навантажень, швидкостей і т.д. з амплітудами, які в багато разів перевищують реальні величини [5, 6]).

Використання результатів досліджень, які базуються на нестійких рішеннях чисельного інтегрування, може привести до помилкових висновків. Тому перед проведенням досліджень перехідних процесів вантажопідйомних машин, які представлені багатомасовими динамічними моделями, обов'язково необхідно проводити перевірку математичних моделей на стійкість. Незважаючи на це, аналіз наукових публікацій показує, що в численних дослідженнях динаміки вантажопідйомних машин часто застосовуються математичні моделі без попередньої перевірки на стійкість [2, 4 та ін.].

Мета роботи: дослідити стійкість математичних моделей, які описують рух мостових кранів, представлених тримасовою та чотиримасовою розрахунковими схемами.

З теорем Ляпунова А.М. випливає, що система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійною матрицею асимптотично стійка, якщо всі корені $\lambda_j = \lambda_j(A)$ характеристичного рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ (E - одинична матриця) мають негативні дійсні частини:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j(A) < 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Проаналізуємо стійкість тримасової динамічної моделі мостового крана [1, 5, 6], рух якої описується системою диференціальних рівнянь (2), за допомогою критерію Гурвіца.

Рух тримасової моделі мостового крана описується наступною системою диференційних рівнянь

$$\begin{gathered} m_{к}\ddot{x}_{к} + C_D(\dot{x}_{к} - \dot{x}_{м}) + C_{м}(x_{к} - x_{м}) + P_w sign(\dot{x}_{к}) = P_{д}; \\ m_{м}\ddot{x}_{м} + C_{к}(x_{м} - x_{г}) - C_D(\dot{x}_{к} - \dot{x}_{м}) - C_{м}(x_{к} - x_{м}) = 0; \\ m_{г}\ddot{x}_{г} + C_{к}(x_{м} - x_{г}) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

де всі позначення загальноприйняті та наведені в роботах [1, 5, 6].

Після лінеаризації зведеної до ходових коліс сили приводу $P_д$ і перепозначення змінних ($x_к = x_1$, $x_м = x_2$, $x_г = x_3$, $\dot{x}_к = \dot{x}_1 = x_4$, $\dot{x}_м = \dot{x}_2 = x_5$, $\dot{x}_г = \dot{x}_3 = x_6$) відповідна однорідна система диференціальних рівнянь (2) буде мати вигляд:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6;\\
\dot{x}_2 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6;\\
\dot{x}_3 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6;\\
\dot{x}_4 &= -\frac{C_м}{m_к}x_1 + \frac{C_м}{m_к}x_2 + 0x_3 - \frac{C_D+E_j}{m_к}x_4 + \frac{C_D}{m_к}x_5 + 0x_6;\\
\dot{x}_5 &= \frac{C_м}{m_м}x_1 - \left(\frac{C_м}{m_м} + \frac{C_к}{m_м}\right)x_2 + \frac{C_к}{m_м}x_3 + \frac{C_D}{m_м}x_4 - \frac{C_D}{m_м}x_5 + 0x_6;\\
\dot{x}_6 &= 0x_1 + \frac{C_к}{m_г}x_2 - \frac{C_к}{m_г}x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Характеристичне рівняння для тримасової моделі:

$$
\lambda^6 + \left(\frac{C_D}{m_м} + \frac{C_D + E_j}{m_к}\right)\lambda^5 + \left(\frac{C_м}{m_к} + \frac{C_м + C_к}{m_м} + \frac{C_к}{m_г} + \frac{C_D E_j}{m_м m_к}\right)\lambda^4 + \left(\frac{C_к C_D + (C_м + C_к)E_j}{m_м m_к} + \frac{C_к C_D}{m_г m_м} + \frac{C_к(C_D + E_j)}{m_г m_к}\right)\lambda^3 +
$$

$$
+\left(\frac{C_м C_к}{m_м m_к} + \frac{C_к C_м}{m_г m_к} + \frac{C_к C_м}{m_м m_г} + \frac{C_к C_D E_j}{m_г m_м m_к}\right)\lambda^2 + \frac{C_к C_м E_j}{m_г m_м m_к}\lambda + 0\lambda^0 = 0. \tag{4}
$$

Матриця Гурвіца для тримасової моделі має вигляд:

$$
\Gamma = \begin{pmatrix}
a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0\\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0\\
0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2\\
0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6
\end{pmatrix} \Rightarrow \quad
\Gamma = \begin{pmatrix}
a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0\\
a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1\\
0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}, \tag{5}
$$

де $a_0 = 1$; $a_1 = \dfrac{C_D}{m_м} + \dfrac{C_D + E_j}{m_к}$; $a_2 = \dfrac{C_м}{m_к} + \dfrac{C_к + C_м}{m_м} + \dfrac{C_к}{m_г} + \dfrac{C_D E_j}{m_к m_м}$; $a_5 = \dfrac{C_к C_м E_j}{m_к m_м m_г}$; $a_6 = 0$;

$$
a_3 = \frac{C_к C_D + (C_к + C_м)E_j}{m_к m_м} + \frac{C_к C_D}{m_м m_г} + \frac{C_к(C_D + E_j)}{m_к m_г}; \quad a_4 = \frac{C_к C_м}{m_к m_м} + \frac{C_к C_м}{m_к m_г} + \frac{C_к C_м}{m_м m_г} + \frac{C_к C_D E_j}{m_к m_м m_г}.
$$

Визначники Гурвіца для тримасової моделі:

$$
\Delta_1 = a_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1\\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_4 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = -(a_3^2 - a_1 a_2 a_3 - a_1 a_5 + a_1^2 a_4);
$$

$$
\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & 1\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2\\ 0 & 0 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_3 a_5 - a_1 a_2^2 a_5 - a_5^2 + a_1 a_4 a_5 - a_3^2 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_4 a_5 - a_1^2 a_4^2;
$$

$$
\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1\\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix} = a_2 a_3 a_5^2 - a_1 a_2^2 a_5^2 - a_5^3 + a_1 a_4 a_5^2 - a_3^2 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + a_1 a_4 a_5^2 - a_1^2 a_4^2 a_5;
$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Оскільки коефіцієнти системи рівнянь (2) - позитивні величини, то і визначники Гурвіца $\Delta_1 \ldots \Delta_5$ також більше нуля. Але визначник Δ_6 дорівнює нулю, що говорить про знаходження системи (2) на межі стійкості і вона не є асимптотично стійкою, а відноситься до нейтрально стійкої.

За аналогією з вищевикладеним був також виконаний аналіз стійкості за критерієм Гурвіца чотиримасової динамічної моделі мостового крана, для якої було одержано аналогічні результати.

Висновки:

- використання багатомасових моделей вантажопідйомних машин без попередньої перевірки на стійкість може привести до помилкових результатів досліджень перехідних процесів. Наприклад, розглянуті тримасова і чотиримасова моделі, не є асимптотично стійкими, а можуть бути нейтрально стійкими, тобто вони можуть застосовуватися для дослідження перехідних процесів мостових кранів тільки після перевірки на стійкість з певними для кожного крана коефіцієнтами диференціальних рівнянь;

- збільшення числа мас в моделі вантажопідйомної машини зменшує запас її стійкості, тому моделі, що мають більше п'яти мас, як правило, нестійкі при деяких значеннях коефіцієнтів рівнянь. При збільшенні числа мас в моделі, зростає ступінь характеристичного рівняння (для чотиримасової моделі - 8-а, для п'ятимасової - 10-а) і - трудомісткість дослідження моделі на стійкість;

- врахування в багатомасових моделях механічних характеристик електроприводу крана на робочих ділянках збільшує запас стійкості моделі, оскільки двигун в цьому випадку є демпфером коливань, а на неробочих ділянках характеристик (наприклад, на початку розгону по природній характеристиці) - зменшує запас стійкості.

Список літератури:

1. Ловейкін В.С. Динаміка і оптимізація режимів руху мостових кранів. Монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. – К.: ЦП «КОМПРІНТ», 2016. – 310 с.

2. Динаміка вантажопідйомних та будівельних машин: монографія / Човнюк Ю.В., Сівак І.М. – К.: Видавництво «АграрМедіаГруп», 2014. – 740 с.

3. Loveikin V. Crane motor optimization. / Loveikin V., Romasevych Yu., Liashko A.// Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2021. – Vol.51. – P. 65-75.

4. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К. - Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.

5. Нєженцев О.Б. Дослідження стійкості математичних моделей мостових кранів // Матеріали XIV Міжнародної конференції «Стратегія якості у промисловості і освіті» (4 - 7 червня 2018 р., Варна, Болгарія). У 2-х томах. Том 2. – Дніпро – Варна, 2018. – С. 135-139.

6. Нєженцев О.Б. До питання стійкості математичних моделей вантажопідйомних кранів // Actual problems of practice and science and methods of their solution. Abstracts of IV International Scientific and Practical Conference. Milan, Italy 2022. Pp. 676-679.

References

[1] V. Loveikin and Yu. Romasevych, *Dynamics and Optimization of Overhead Crane Movement Modes.* Kyiv, Ukraine: CP "COMPRINT", 2016. [In Ukrainian]

[2] Yu. Chovniuk and I. Sivak, *Dynamics of Lifting and Construction Machines*. Kyiv, Ukraine: "AgrarMediaGroup", 2014. [In Ukrainian]

[3] V. Loveikin, Yu. Romasevych and A. Liashko, "Crane motor optimization", *J. Theor. Appl. Mechanics*, vol. 51, pp. 65–75, 2021.

[4] V. Loveikin, Yu. Chovniuk, M. Dikteruk and S. Pastushenko, *Modeling of the Dynamics of Mechanisms of Lifting Machines.* Kyiv – Mykolaiv, Ukraine: RVV MDAU, 2004. [In Ukrainian]

[5] O. Nyezhentsev, "Study of stability of mathematical models of overhead cranes" // *Materials of the 14th International Conference* "Quality Strategy in Industry and Education" (June 4 - 7 2018, Varna, Bulgaria). In 2 volumes. Volume 2. - Dnipro - Varna, 2018. – pp. 135-139. [In Ukrainian]

[6] O. Nyezhentsev, "To the issue of stability of mathematical models of cargo cranes" // Actual problems of practice and science and methods of their solution. Abstracts of IV International Scientific and Practical Conference. Milan, Italy 2022. Pp. 676-679. [In Ukrainian]

Analysis of stability of mathematical models of lifting machines

Nyezhentsev Oleksiy
Ph.D., Associate Professor of Department of Applied Hydro-Aeromechanics and Mechatronics of National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»
http://orcid.org/0000-0001-5446-3770

Abstract. *A methodology was developed and a study of the stability of mathematical models describing the movement of lifting machines was carried out. Three-mass and four-mass dynamic models of overhead cranes described by nonlinear differential equations are considered. These models are used for the analysis and synthesis of transient processes of lifting machines. The study of the stability of mathematical models was carried out using the Hurwitz criterion after linearization of the combined force of the crane movement drive. The results of testing the stability of three- and four-mass models describing the movement of an overhead crane with a load capacity of 20 tons are presented.*
Keywords: *lifting machine, overhead crane, mathematical model, numerical method of integration, stability of mathematical models, Hurwitz's criterion*