

УДК 630*377.4:531.6

Наукові основи енергетичного підходу до аналізу поведінки механічних систем

Мачуга¹ Олег Степанович; Яхно² Олег Михайлович

1 – НЛТУ України, м. Львів, Україна, 2 – КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

Анотація. Енергетичний підхід до аналізу поведінки механічних систем пов'язується із будівництвом функціоналів енергії, екстремальні точки яких досягаються на множині функцій дійсного стану системи. Екстремальні точки функціоналів встановлюються із умови їх стаціонарності, тобто варіаційного рівняння. Визначення таких функціоналів дозволяє формувати адекватну модель розгляданого об'єкту. Апроксимація функцій стану є підвалиною будівництва аналітичних та числових розв'язків відповідних класів задач. Для механічних систем із вираженими дисипативними властивостями умова стаціонарності функціоналу енергії трансформується у відповідну варіаційну нерівність.

Ключові слова: функціонал енергії; варіаційні рівняння; варіаційні нерівності; дисипативні властивості.

Фізичний стан будь-якого матеріального тіла визначається його енергетичним ресурсом – сукупністю механічної, внутрішньої, поверхневої, хімічної енергій, енергії електростатичного, магнітного поля тощо. Цей енергетичний ресурс, або простіше – енергія, в повній мірі детермінує здатність такого тіла до внутрішніх трансформацій, а також тип його взаємодії з іншими матеріальними тілами. Академіком Л.І. Седовим сформульовано постулат [1], згідно якого енергія є основною характеристикою будь-якого матеріального об'єкту, з якої отримуються всі інші характеристики цього об'єкту. Поряд із цим відзначено, що енергія є визначальною характеристикою фізичного стану матеріального тіла в цілому і водночас – питомою характеристикою стану матеріального континууму в кожній його точці, оскільки енергетичний ресурс характеризується адитивністю.

Процеси взаємодії окремих матеріальних об'єктів супроводжуються обміном енергіями між ними та одночасно взаємним перетвореннями окремих видів енергії. Ці обмінні та трансформаційні процеси відбуваються у цілковитій відповідності до закону збереження енергії, або перше начало термодинаміки. Класичне формулювання цього закону: «Неможливо створити циклічно діючий механізм (вічний двигун), який би був джерелом корисної енергії без використання буд-якого зовнішнього, стосовно такого механізму, джерела енергії», пов'язувалось із закладенням підвалин теорії теплових машин. Еквівалентне формулювання закону збереження енергії, зручне для використання в сучасному природознавстві, формулюється наступним чином [2]: «Енергія ізольованої системи, за всіх змін цієї системи, зберігає постійну величину». В термінах даного викладу пропонується наступне формулювання: «В процесі взаємодії матеріальних об'єктів їх сумарний енергетичний ресурс є незмінним».

У взаємодії реальних неідеалізованих матеріальних об'єктів слід виокремити певні істотні особливості. Насамперед це деяка протяжність такої взаємодії в часі, що визначає фізичний процес як рівноважний або нерівноважний. Крім того суттєвим є напрямок перетікання енергії між об'єктами в процесі взаємодії, оскільки так задається напрям тих чи інших фізичних процесів, які в залежності від реологічних властивостей об'єктів можуть бути, як зворотними, так і незворотними. Закон збереження енергії не накладає жодних обмежень на напрям і тривалість таких процесів, залишаючись справедливим для рівноважних і нерівноважних, зворотних і незворотних процесів. Другий закон термодинаміки визначає напрямки процесів, що відбуваються під час взаємодії матеріальних об'єктів: згідно формулювання Клаузіуса [2]: «Теплота не може сама собою переходити від тіла з нижчою температурою до тіла з вищою температурою». Поряд із таким формулюванням другого

начала термодинаміки існують ряд інших, зокрема - Планка, Больцмана тощо.: «Температура є єдиною функцією стану, яка визначає напрям самовільного теплообміну»; «Робота може бути безпосередньо і повністю перетворена в тепло шляхом тертя або електронагріву». Отже істотною особливістю взаємодії матеріальних об'єктів є передавання частини енергії тілом із більшим енергетичним ресурсом тілу з меншим енергетичним ресурсом. В процесі такого передавання реалізуються енергетичні трансформації, які є мірою його незворотності.

Енергія за означенням є скалярною величиною, однак закладена в цьому скалярі інформація щодо структури об'єкта, його реологічних особливостей та геометричної конфігурації, специфіки взаємодії між собою окремих складників такого об'єкта тощо, дозволяє визначати з неї істотні скалярні, векторні та тензорні характеристики станів та процесів у досліджуваних об'єктах – матеріальних точках, твердих тілах, однорідних і структуризованих суцільних середовищах, полях. Тому розвиток наукових основ застосування енергетичного підходу, пов'язаного з аналізом енергетичних ресурсів фізичних об'єктів, енергетичних трансформацій в процесах взаємодії таких об'єктів, є одним із вагомих напрямків вдосконалення фундаментальних та прикладних методів досліджування найрізноманітніших процесів, станів і явищ, пов'язаних із різними царинами природи, науки, техніки та інших галузей пізнання. Застосування такого підходу у аналізі поведінки багатокомпонентних матеріальних об'єктів, зокрема реальних механічних та гідромеханічних систем, дозволить формулювати постановки і будувати розв'язки нових класів задач, узагальнювати уже відомі результати.

У випадку моделювання взаємодії матеріальних об'єктів зазвичай використовують фізичні моделі, суть яких полягає у формулюванні головних фізичних законів щодо поведінки досліджуваних об'єктів та опису їх структурних, реологічних та інших властивостей. Перехід в подальшому до математичних моделей пов'язується із записом певних абстрактних математичних конструкцій, вивчення функціональних властивостей яких може привести до отримання числових даних, які вказують на вид поведінки досліджуваних матеріальних об'єктів в тих чи інших умовах взаємодії, що є предметом вивчення. Обґрунтування адекватної математичної моделі потребує детального опрацювання досліджуваного об'єкту та вибору базових характеристик, які повинні бути змодельовані.

Розрізняють два підходи до моделювання фізичних процесів чи станів – силовий (або векторний) та енергетичний (або аналітичний).

Використання І. Ньютоном в дослідженнях механічних об'єктів понять «мертва сила» (інакше – тиск) та «імпульс», дало поштовх до використання сили як мірила впливу одного тіла на інше в процесі їх взаємодії та стало підґрунтям до формування засад векторної механіки, оскільки і сила і імпульс є векторними величинами. Задача полягає у відшуканні всіх сил, що діють на кожен із матеріальних об'єктів в будь-який момент часу, після чого рух чи стан такого об'єкту стає визначеним. Аналіз та синтез діючих на матеріальний об'єкт силових факторів - сил та моментів складають підвалину векторної механіки, яка й породжує відповідний комплекс методів математичного моделювання. Класичне визначення сили для механічних систем: «Сила – це причина, яка надає, або намагається надати рух тілу, до якого ця сила прикладена» свідчить, що в рамках векторної механіки власне сила є найважливішим чинником зміни руху тіла без аналізу того, що ж породжує цю силу. Наведене визначення є прийнятним не тільки для суто механічних систем, але і для систем де враховуються інші види взаємодії тіл – теплова, електромагнітна тощо, розширюючи межі застосування векторного підходу стосовно таких класів задач.

Розглядання силової взаємодії матеріальних об'єктів у поєднанні із запровадженням поняття нескінченно малого об'єму уможливорює постановку задач векторної механіки у диференційній формі. Такі постановки характеризуються наявністю певної кількості диференціальних рівнянь в частинних похідних щодо, зокрема силових факторів, переміщень

точок системи та інших скалярних, векторних і тензорних характеристик стану матеріального об'єкту в цілому чи їх питомих величин. Згадані вище характеристики визначають фізичний стан матеріального тіла як точку в деякому абстрактному просторі станів, запровадженому зокрема в [1]. Для забезпечення однозначної відповідності між такою точкою та фізичним станом матеріального об'єкту задаються певні початкові та граничні умови.

Запровадження поняття енергії належить Лейбніцу, який використовував у своїх трактатах поняття *vis viva* – жива сила. Чисельно ця величина рівна подвоєній кінетичній енергії. Згодом це поняття використовували низка дослідників, зокрема Томас Юнг, Коріоліс, Томпсон (лорд Кельвін), а в подальшому – всі відомі інженери, механіки і математики.

Закладення Ж. Лагранжем основ аналітичної започаткувало формування енергетичного підходу до вивчення механічної поведінки систем матеріальних тіл. Завдяки розвитку фундаментальних основ математичного та функціонального аналізу у працях Куранта і Гільберта, аналітичний підхід набув можливості використовуватись в задачах для матеріального континууму з вираженими границями. Згаданий розвиток теоретичних засад уможливив в подальшому формулювання найрізноманітніших класів проблем механіки, фізики, оптики, економіки тощо за допомогою варіаційно-енергетичних постановок задач. Для кожного з таких класів задач математично строго доводиться, що розв'язок відповідного таким постановкам варіаційного принципу еквівалентний розв'язку такої ж задачі математичної фізики в диференційній формі.

Застосування аналітичного підходу полягає у визначенні множини функцій, яка забезпечує екстремальне або стаціонарне (найчастіше – мінімальне) значення спеціальним чином збудованого енергетичного функціоналу. Такий функціонал й детермінує стан досліджуваного матеріального об'єкту чи параметри процесів, в яких він перебуває. Підхід базується не на вивченні силових факторів, як наслідків тих чи інших енергетичних станів, а на безпосередньому аналізі енергетичного ресурсу матеріального об'єкту в енергетичному просторі станів [1], як його первинної характеристики. Задача полягає у визначенні розподілу енергії в матеріальному об'єкті, з якого, згідно постулату про первинність енергії, визначаються і силові характеристики стану матеріального об'єкту в кожній його точці чи в цілому, і характеристики його руху.

Значним недоліком у застосуванні енергетичного підходу є теоретичні утруднення у випадку вивчення середовищ та елементів, у яких суттєвим чином виявляються дисипативні властивості. Річ у тім, що розсіювання або дисипація енергії вказує на перетворення частини механічної чи будь-якої іншої активної енергії (енергії електромагнітного поля, хімічної тощо) під час процесу взаємодії, у внутрішню енергію – теплову, поверхневу тощо. Оскільки такий перехід є незворотнім і ця незворотність чітко окреслюється одним із вищенаведених формулювань другого начала термодинаміки, тому всі процеси в дисипативних середовищах є незворотними.

Для обґрунтування повноправного застосування енергетичного підходу для механічних об'єктів із істотними дисипативними властивостями на основі варіаційного рівняння будуватиметься відповідна варіаційна нерівність, яка й покладено в основу дослідження згаданих об'єктів. Зокрема передбачається використання такого підходу у дослідженнях кусково-однорідних механічних та гідромеханічних систем, низки технічних задач, що приводяться до таких постановок.

Варіаційні нерівності використовуються в постановках та під час розв'язування багатьох класів задач механіки неоднорідних структур, зокрема у задачах із односторонньою границею, попередньо невідомою границею, задачах фільтрації, задачах теорії мащення й інших. Задачі аналізу незворотних процесів для реальних гідромеханічних систем, у яких враховуються реологічні властивості рідин і пружно-пластичних твердих тіл також

пов'язуються з відповідними варіаційними нерівностями, математичний апарат для яких обґрунтовано зокрема в праці Д. Кіндерлерер, Г. Стампаккья [3] та інших.

Список літератури

1. Седов Л. И. Виды энергии и их трансформации. *Прикладная математика и механика*. 1981. - вып. 6, (т. 45). С. 964 – 984.
2. Базаров И. П. Термодинамика. Москва: Высшая школа, 1991. 376 с.
3. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.

Scientific bases of energy approach to the analysis of the mechanical systems behavior

Machuga Oleg; Yakhno Oleg

***Abstract.** The energy approach to the analysis of the behavior of mechanical systems is associated with the construction of energy functionals, the extreme points of which are achieved on a set of functions of the actual state of the system. Extreme points of functionals are established from the condition of their stationarity, ie the variational equation. The definition of such functionalities allows to formulate an adequate model of the considered object. Approximation of state functions is the basis for constructing analytical and numerical solutions of the corresponding classes of problems. For mechanical systems with pronounced dissipative properties, the conditionality condition of the energy functional is transformed into a corresponding variational inequality.*

***Key words:** energy functional; variational equations; variational inequalities; dissipative properties.*