УДК 532.551

Стаціонарна оптимальна турбулентна течія у круглій трубі: аналітичний ров’язок на підставі моделі рейнольдса-буссинеска

Лук’янов П.В., Сунь Линь
Національний авіаційний університет, Київ, Україна

Анотація: *Запропоновано варіаційний підхід до розв’язання проблеми замикання в турбулентності. Цей підхід вільний від додаткових, не чім не обґрунтованих, гіпотез, таких як у Кармана, Прандтля або Мілліонщикова. Єдине, що використовується, це очевидний фізичний факт: дійсний рух рідини, якщо в нього не втручатись, є завжди оптимальним. Для руху рідини у круглій прямолінійній трубі це означає максимальну втрату. Отриманий загальний аналітичний розв’язок має той самий вигляд як і у сучасній модифікованій теорії турбулентності, де зазнається, що реальний розподіл швидкості у турбулентній течії (на пластині) не зовсім є таким, що має логарифмічний вигляд, а близький до функції помилок Гауса. Але різниця у тому, що розв’язок, який відповідає фізичним граничним умовам задачі, схожий саме на такий, що спостерігається у закручених течіях.*

Ключові слова: *турбулентна течія, нестислива рідина, прямолінійна кругла труба, аналітичний розв’язок, модель Рейнольдса-Буссинеска, проблема замикання в турбулентності*

Вступ

Турбулентна течія має одну суттєву особливість -- просторову залежність коефіцієнта турбулентної в’язкості. Це пояснює той факт, що навіть для такої досить простої задачі, як рух рідини уздовж прямолінійної круглої труби не існує єдиної теорії. Відомі теорії Прандтля [1] та Кармана [2] використовують не чим не обґрунтовані гіпотези. Отже, результати, що отримані за ними – не універсальні. Ця ж необґрунтованість відноситься до гіпотези Мілліонщікова [3]. Відносно нещодавно Сохраб [4] побудував свою теорію на підставі статистичної фізики і отримав розподіл у вигляді функції помилок Гауса. На невірності логарифмічного профілю наголосили Баренблатт [5] та ін.

Формулювання та розв’язок задачі

Для опису турбулентної течії рідини із єдиною компонентою швидкості уздовж прямолінійної труби із круглим перерізом застосуємо модель Рейнольдса-Буссинеска. Згідно із цією моделлю, у циліндричних координатах (r, φ, z) рух описується наступним рівнянням:

$$0 = \mathrm{Const} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\mu_T\left(\overline{V}_z\right)\frac{d\overline{V}_z}{dr}\right) + \mu\left(\frac{d^2\overline{V}_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{V}_z}{dr}\right). \qquad (1)$$

Граничні умови стандартні: умова прилипання на стінці та умова максимальності значення швидкості на вісі труби. Зазначимо, що так званий в’язкий підшар є насправді турбулентним, просто там в’язкість здійснює вплив на турбулентні пульсації. Це було показано експериментально американськими вченими ще в 50-роки минулого століття. Отже, можна вважати рух турбулентним практично усюди.

Використаємо варіаційний метод. Із усіх можливих рухів, дійсним буде той, що забезпечує максимум функціоналу втрати рідини

$$J = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{R_p}\overline{V}_z \cdot r dr\right)d\varphi \Rightarrow \max . \qquad (2)$$

Шуканий розв’язок отримається шляхом розв’язання наступного рівняння Ойлера, що відповідає вигляду функціоналу (2).

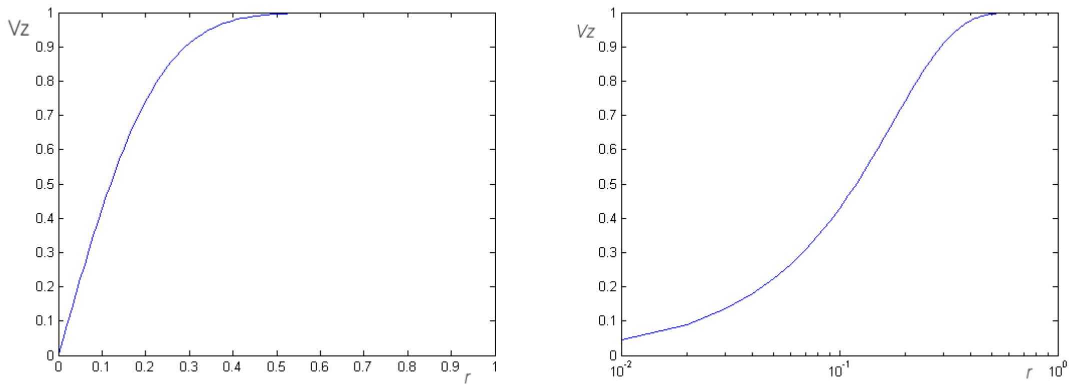
$$\frac{d^2\overline{V}_z}{dr^2} = \frac{1}{A} r \frac{d\overline{V}_z}{dr}. \qquad (3)$$

Він має наступний вигляд:

$$\overline{V}_z = C_1 + C_2 erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2}{A}} \cdot r\right). \qquad (4)$$

Константи C_1 та C_2 в (4) визначаються із граничних умов. Константа A визначається , скоріше за все, із умови виходу розподілу швидкості на асимптотичний рівень, коли подальші значення функції вже практично не відрізняються.

На рис. 1 показано частинний випадок (4), що задовольняє умові прилипання та максимальному значенню на горизонті симетрії$(r = 1)$. Константа C_1 дорівнює нулеві, а C_2 - - одиниці. Константа в функції помилок взята рівною 4. Обидва рисунки, як видно, нагадують відомі дані. Другий рисунок – фактично має форму ложки, але без надломів, де похідна терпить розрив. На відміну від існуючих класичних теорій, все описується лише одним співвідношенням, яке справедливе для усієї області течії. Дуже важливо те, що у модифікованій теорії турбулентності Сохраба також отримано розв'язок у вигляді функції помилок Гауса. Отриманий за зовсім різними методами, фактично один і той же результат близьких задач свідчить про те, що йому можна довіряти.



а) б)

Рис. 1. Профіль швидкості в звичайних координатах (а) та у напівлогарифмічних (б).

Та попри, здавалось, разючу схожість профілів на рис. 1 із відомими, оптимальним профілем, що відповідає умові прилипання на стінці труби і умові максимуму швидкості на вісі труби, є наступний розв'язок

$$\overline{V}_Z = \left(erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2}{A}}\right) - erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2}{A}} \cdot r\right)\right) / erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2}{A}}\right) \qquad (5)$$

Графічна залежність представлена на рис. 2. Вона відповідає

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2}{A}} = 2. \qquad (6)$$

Саме такий, витягнутий, профіль повздовжньої швидкості спостерігається у течіях, що мають закрутку. А як відомо – вони є оптимальними: закрутка течії відбувається сама собою і являє засіб перебудови течії на таку, що має максимальну втрату.

Слід зауважити, що загальний розв'язок (4) дозволяє також отримати розподіл швидкості, у якому поблизу стінки труби швидкість має скінчене значення, тобто враховується тонкий ламінарний шар і гранична умова по суті формулюється для зовнішньої границі цього шару. Більш детальніше про це в роботі [6], де наводиться порівняння моделі оптимальної закрученої течії моделі із більш ранніми [7,8].

На завершення, слід відзначити, що відсутність загальної теорії турбулентної течії в трубі привертає увагу науковців до цієї проблеми і зараз. Так в роботі [9] побудовано модель, що базується на гіпотезі про певний тип руху рідких частинок, що корелює з роботою [3].

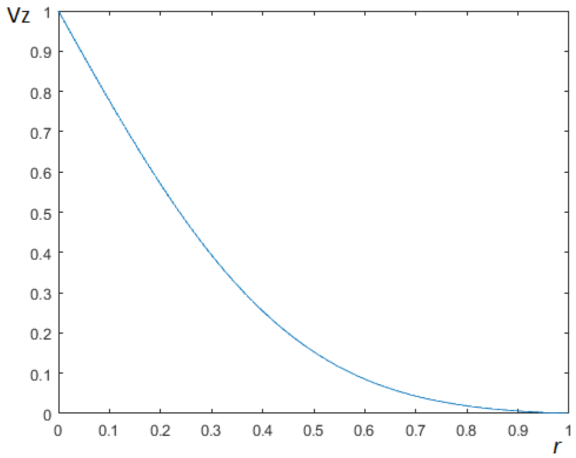


Рис. 2. Профіль швидкості, що відповідає розв'язку (5) та співідношенню (6) .

Автори щиро вдячні проф. Турику Володимиру Миколайовичу за цінні поради при обговоренні фізичного змісту розглянутої задачі.

Список літератури

1. *Prandtl L.* Uber die ausggebildete Turbulenz / L. Prandtl // ZAMM -- 1925, v. 5, p. 136
2. *Karman v. T.* Turbulence and skin friction / T. v. Karman // J. Aeronaut. Sc. – 1934, v.. 1, pp. 1-20.
3. *Миллионщиков М.Д.* Турбулентное течение в пограничном слое и трубах / М.Д. Миллионщиков – М., Наука. 1969 .
4. *Sohrab S.H.* A Modified Theory of Turbulent Flow over a Flat Plate / S.H. Sohrab // Proc. Of the 5th IASME/WSEAS Conference of Fluid Mechanics and Aerodynamics, Athens, Greece, August 25-27, 2007.
5. *Barrenblatt G.I.* Scaling laws for fully developed turbulent flow in pipes: Discussion of experimental data / G. I. Barenblatt, A.J. Chorin, and V.M. Prostokishin // Proc. Nat. Acad. Sci. USA – 1997, -- v. 94, P. 773-776. doi: 10.1073/pnas.94.3.773
6. *Лукьянов П.В.* Стационарное турбулентное течение с винтовой симметрией несжимаемой жидкости в круглой прямолинейной трубе / П.В. Лукьянов // Промислова гідравліка і пневматика. – 2021,№1(65). С. 17—26.
7. *Блюсс Б.О.* Моделювання квазіточкового турбулентного вихору в закручених течіях рідини в збагачувальному устаткуванні / Б.О. Блюсс, П.В. Лук'янов, С.В. Дзюба // Геотех. Механ. – 2018, -- № 143, с. 49-59.
8. 8*Лук'янов П.В.* Розвиток аналітичних моделей компактних монопольних вихорових тесій / П.В. Лук'янов, В.М. Турік // Наукові вісті НТТУ "КПІ". – 2017, --№ 4(96), с. 81-92.
9. *Хлапук М. М.* До розвитку теорії руху потоку в трубопроводах при турбулентному режимі / М. М. Хлапук, В. С. Мошинський, О. В.Безусяк, Л. Р. Волк // Вісник НУВГП. Технічні науки : зб. наук. праць. – Рівне : НУВГП, 2019. – Вип. 3(87). – С. 3-18.