УДК 532.551

Стаціонарна оптимальна турбулентна течія у плоському каналі: аналітичний ров'язок на підставі моделі рейнольдса-буссинеска

Лук'янов П.В., Сунь Линь
Національний авіаційний університет, Київ, Україна

Анотація: *Запропоновано варіаційний підхід до розв'язання проблеми замикання в турбулентності. Цей підхід вільний від додаткових, не чім не обґрунтованих, гіпотез, таких як у Кармана, Прандтля, Мілліонщикова, Ван Дріста. Єдине, що використовується, це очевидний фізичний факт: дійсний рух рідини, якщо в нього не втручатись, є завжди оптимальним. Для руху рідини у шарі це означає максимальну втрату. Отримані результати дуже близькі до сучасної модифікованої теорії турбулентності Сохраба, а також описуються тією ж функцією що і відомий множник Ван Дріста, який отримав широке визнання завдяки гарному узгодженню із експериментом.*
Ключові слова: *турбулентна течія, нестислива рідина, плоский канал, аналітичний розв'язок, модель Рейнольдса-Буссинеска, проблема замикання в турбулентності*

Вступ

На відміну від ламінарної, турбулентна течія має одну суттєву особливість -- просторову залежність коефіцієнта турбулентної в'язкості. Навіть для такої, скажімо найпростішої, задачі як стаціонарний рух рідини уздовж пластини не існує чіткої простої теорії. Так відомі теорії Прандтля [1] та Кармана [2], що базуються на додаткових гіпотезах. Ці гіпотези не чим не обґрунтовані і результати, що отримані за ними – не універсальні. Так гіпотеза Кармана дає добрі результати на відстані від твердої поверхні, а гіпотеза Прандтля дає можливість біль менш точно описувати течію в пристінній області. Ця ж необґрунтованість відноситься до гіпотези Мілліонщікова [3]. Відносно нещодавно, з'явилась теорія Сохраба [4], вільна від залежності масштабу турбулентності. Сохраб побудував свою теорію на підставі статистичної фізики і отримав розподіл у вигляді функції помилок Гауса. Цікаво, що Сохраб, захищаючи свою теорію, посилається на такого відомого вченого як Г.І. Баренблатт, який наголосив на невірності логарифмічного профілю, надаючи перевагу степеневому закону [5].

Формулювання та розв'язок задачі

Для опису турбулентної течії рідини із єдиною компонентою швидкості уздовж каналу застосуємо модель Рейнольдса-Буссинеска. Згідно із цією моделлю, рух описується наступним рівнянням:

$$0 = \mathrm{Const} + \frac{d}{dz}\left(\mu_T\left(\bar{V}_x\right)\frac{d\bar{V}_x}{dz}\right) + \mu\frac{d^2\bar{V}_x}{dz^2}. \qquad (1)$$

У якості граничних умов оберемо стандартні: умова прилипання на стінці

$$\bar{V}_{x}\big|_{z=0} = 0$$

та умова максимальності значення швидкості на середині каналу

$$\frac{d\overline{V}_x}{dz}_{|z=1} = 0.$$

Зазначимо, що так званий в’язкий підшар є насправді турбулентним, просто там в’язкість здійснює вплив на турбулентні пульсації. Це було показано експериментально американськими вченими ще в 50-роки минулого століття. Отже, можна вважати рух турбулентним практично усюди.

Якщо розв’язати рівняння (1) відносно функції турбулентної в’язкості, то отримаємо:

$$\mu_T = \mu_T\left(\frac{dV_x}{dz}\right). \tag{2}$$

Використовуючи варіаційні методи, вдалось, на підставі максимуму функціоналу втрати рідини

$$J = \int_0^1 V_x dz$$

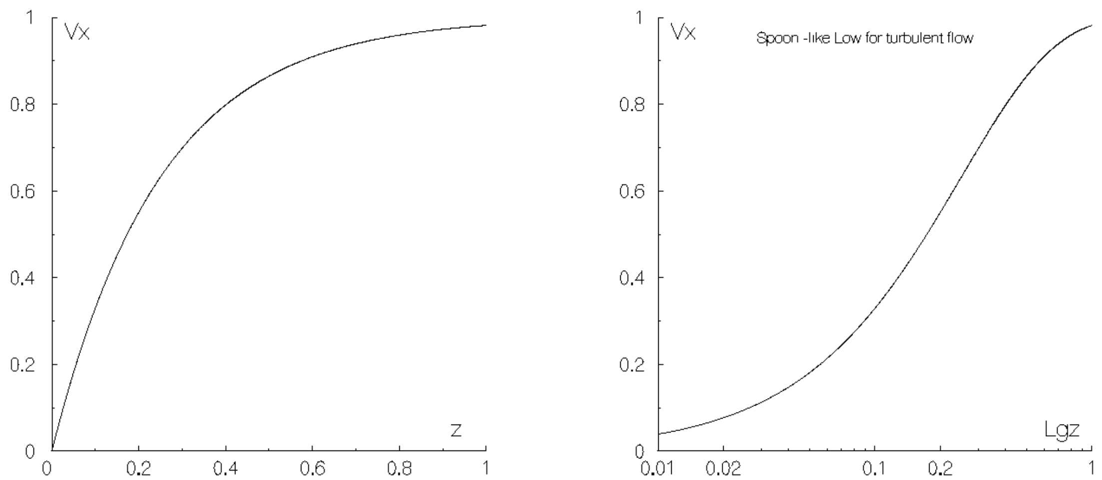
і співвідношення (2), отримати наступне рівняння:

$$\frac{d\overline{V}_x}{dz} = C_2 \frac{d^2\overline{V}_x}{dz^2}. \tag{3}$$

Рівняння (3) відповідає екстремальному розв’язку, що надає втраті рідини максимальне значення. Розв’язок рівняння (3) має вигляд:

$$\overline{V}_x = A + B\exp\left(\frac{z}{C_2}\right). \tag{4}$$

Константи A та B в (4) визначаються із граничних умов. На рис. 1 показано частинний випадок (4), що задовольняє умові прилипання та максимальному значенню на горизонті симетрії $(z=1)$. Обидва рисунки, як видно, нагадують відомі дані. Другий рисунок – фактично має форму ложки, але без надломів, де похідна терпить розрив. На відміну від класичних законів, все описується лише одним співвідношенням, яке справедливе для усієї області течії.



а) б)

Рис. 1. Профіль швидкості в звичайних координатах (а) та у напівлогарифмічних (б).

Слід відзначити, що експоненціальну правку-множник до логарифмічного розподілу у граничному турбулентному шарі вже давно широко використовують. Цю правку увів Ван Дріст [6] лише на певній аналогії ламінарної течії, що утворюється внаслідок коливань пластини. І, як зазначено в [7], ця аналогія не чим не обґрунтована, на відміну від розв'язку (4), що отриманий на підставі варіаційного принципу, який є загальним і очевидним.

Особливо слід зауважити, що оптимальна турбулентна течія на пластині або в плоскому каналі має іншу природу ніж подібна, що має місце у круглій трубі.

Автори щиро вдячні проф. Турику Володимиру Миколайовичу за цінні поради при обговоренні фізичного змісту розглянутої задачі.

Список літератури

1. *Prandtl L.* Uber die ausggebildete Turbulenz / L. Prandtl // ZAMM -- 1925, v. 5, p. 136
2. *Karman v. T.* Turbulence and skin friction / T. v. Karman // J. Aeronaut. Sc. – 1934, v.. 1, pp. 1-20.
3. *Миллионщиков М.Д.* Турбулентное течение в пограничном слое и трубах / М.Д. Миллионщиков – М., Наука. 1969 .
4. *Sohrab S.H.* A Modified Theory of Turbulent Flow over a Flat Plate / S.H. Sohrab // Proc. Of the 5th IASME/ WSEAS Conference of Fluid Mechanics and Aerodynamics, Athens, Greece, August 25-27, 2007.
5. *Barrenblatt G.I.* Scaling laws for fully developed turbulent flow in pipes: Discussion of experimental data / G. I. Barenblatt, A.J. Chorin, and V.M. Prostokishin // Proc. Nat. Acad. Sci. USA – 1997, -- v. 94, P. 773-776. doi: 10.1073/pnas.94.3.773
6. *Driest, van E.R.* On turbulent flow near a wall/ E/R/ van Driest // Journal of the Aeronautical Science. – 1956, -- v. 23, p. 1007.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский – М.: Наука, 1987 -- 840 с.