УДК 630*377.4:531.6

Мачуга Олег Степанович[1], к.ф.-м.н., д.т.н., доц., **Яхно Олег Михайлович[2],** д.т.н., проф.
1 – НЛТУ України, м. Львів, Україна, 2 – КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

Енергетичний підхід у постановках та розв’язуванні задач для механічних та гідромеханічних структур із змінними границями

Анотація. *Методологію енергетичного підходу у формі варіаційних нерівностей стосовно ексергії та анергії використано для отримання розв’язків класичних задач, пов’язаних із тріщиностійкістю та граничною рівновагою структурованих елементів конструкцій із тріщинами. Використання розвинутого підходу дозволяє більш адекватне, у порівнянні з класичним, трактування результатів розв’язків таких задач. Відзначено, що застосування розробленої методології ексергійно-анергійного аналізу дає змогу вирішення значно широких класів задач механіки руйнування та технічної гідромеханіки, зокрема – процесів кавітації. Це може привести до узагальнення розв’язків таких задач з енергетичних позицій та, можливо, до виявлення нових, некласичних ефектів.*

Ключові слова: *варіаційні нерівності, ексергійно-анергійний аналіз, тріщиностійкість елементів конструкцій, енергетичні трансформації, кавітація.*

Експлуатація машин та технологічного устаткування породжують низку проблем, викликаних взаємодією окремих елементів таких об’єктів, робочого середовища та предмету обробітку. Формалізованими моделями цих об’єктів є механічні та гідромеханічні системи, в яких певним чином ураховуються реологічні та структурні особливості їхніх компонент, контакт із зовнішнім середовищем, наявність неоднорідностей, пустот, тріщин, каверн. До таких класів задач відносяться контактні задачі, задачі тріщиностійкості, кавітаційні процеси, взаємодія потоку рідини із твердими перешкодами тощо. Прогрес неоднорідностей зумовлюється енергетичним станом точок граничних поверхонь. Для постановок та розв’язування такого класу задач пропонується енергетичний підхід за використання методології ексергійно-анергійного аналізу [1].

Для демонстрування підходу розглянено тріщину довжиною $2l$ в необмеженій плоскій пластині одиничної товщини – задача Гріффітса. Унаслідок розтягування пластини зусиллями p, прикладеними перпендикулярно до тріщини на значній відстані від неї (Рис. 1), відбувається накопичення потенційної енергії деформації Π, знак якої визначається видом деформування (розтяг):

$$\Pi = -\left(\Pi_0 - \frac{\pi \cdot l^2 p^2 \left(1-\nu^2\right)}{E}\right), \tag{1}$$

де E, ν – відповідно модуль Юнга та коефіцієнт Пуасона матеріалу пластини, Π_0 – потенційна енергія деформування пластини без тріщини. Стан пластини характеризується ще й поверхневою енергією Γ, запровадженою Гріффітсом:

$$\Gamma = 4\gamma l\,, \tag{2}$$

де γ – питома поверхнева енергія, визначена для кожної із обох поверхонь, що формують тріщину.

Для розглядуваної задачі ексергія співпадає з потенційною енергією пружної деформації, анергія – з поверхневою енергією:

$$Ex = \Pi, \quad An = \Gamma\,. \tag{3}$$

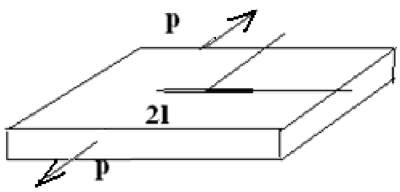

Рис. 1 – Розтягування пластини із тріщиною

Вважатимемо, що півдовжина тріщини l є функцією зовнішнього навантаження p: $l = l(p)$, тому задача полягає у будуванні розв'язку для тіла з наперед невідомою границею. Виконуючи операцію варіювання для виразів енергій (1) та (2) стосовно функції $l = l(p)$, отримаємо:

$$\delta\Pi = \frac{2\pi \cdot l\,\delta l\, p^2 \left(1-\nu^2\right)}{E}, \quad \delta\Gamma = 4\gamma\delta l, \tag{4}$$

Використовуючи (1), (2) та (4) будуємо варіаційну нерівність:

$$\left(\frac{2\pi \cdot l\, p^2\left(1-\nu^2\right)}{E} - 4\gamma\right)\delta l \le 0 \quad . \tag{5}$$

Оскільки варіація довжини тріщини δl є величиною довільною та невід'ємною, тому вираз в дужках відношення (5) є від'ємним або рівним нулю. Отже рівноважна довжина тріщини для даного розтягуючого зусилля p:

$$l \le \frac{2\gamma E}{\left(1-\nu^2\right)p^2}. \tag{6}$$

Знак рівності у (6) реалізується у випадку граничної рівноваги пластини з тріщиною. Тріщина, довжина якої задовольняє умові (6), є стабільною; чим більші розтягуючі зусилля, тим менша допустима довжина тріщини. Наявність в пластині тріщини, довжина якої не задовольняє умову (6), неможлива: це призвело б до негайного повного розірвання пластини.

Відношення (6) можливо використати й для визначення рівноважних, «дограничних» для даної довжини тріщини розтягуючих зусиль:

$$p \le \sqrt{\frac{2\gamma E}{\left(1-\nu^2\right)\cdot l}}. \tag{7}$$

Знак рівності у (7) досягається у граничному випадку рівноваги тіла з тріщиною; перевищення зовнішніми зусиллями величини, визначеної (7), призведе до негайного руйнівного збільшення тріщини.

Отримані за допомогою варіаційної нерівності [1] результати (6), (7) співпадають із відомими результатами. Поряд із цим зазначимо, що отримані тут результати мають вигляд нерівності, що дозволяє їх обґрунтоване тлумачення, чого не забезпечують класичні дані. На Рис. 2 подано графічне представлення цих результатів, які визначають область дограничних станів, область понадграничних станів та лінію параметрів стану, що визначає граничну рівновагу розглядуваного об'єкту. Таке представлення результатів повністю відповідає розмежуванню областей енергетичної рівноваги в просторі станів (Рис. 2).

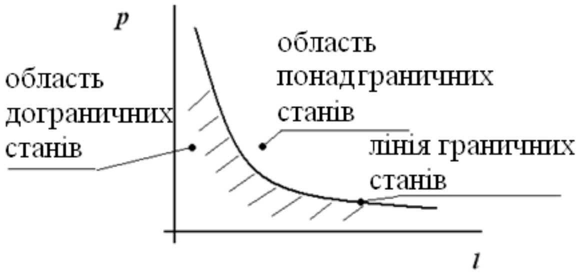

Рис. 2– Виділення областей рівноваги в просторі параметрів станів

Розглянемо далі задачу гальмування і зупинки тріщини композитною вставкою – гасником. Необмежена плоска пластина одиничної товщини з тріщиною довжиною $2l$ розтягується поперечними до напрямку тріщини зовнішніми зусиллями p. На продовженні осі тріщини розташовано шарувату вставку – гасник (див. Рис. 3).

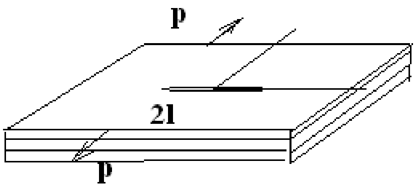

Рис. 3 – Шарувата вставка – гасник із тріщиною

Напружений стан такого тіла характеризується потенційною енергією деформації (3) та поверхневою енергією (4). В багатошарових структурах унаслідок їхнього розшарування формуються зони розтріскування, де частина пружної енергії витрачається на подолання тангенційних зусиль міжфазного зчеплення. Для n -шарової вставки вираз розсіювання енергії [2], в припущенні що власне таке розсіювання відбувається в зоні тріщини, має наступний вигляд:

$$E\tau = \frac{4}{3} n \cdot (n-1) \frac{\tau_S^2 l^3}{E} \left(1-\nu^2\right) \tag{8}$$

де τ_S – дотичні напруження міжфазної взаємодії типу пластичного проковзування. У розглядуваному випадку Ex виражається відношенням (3); для анергії з урахуванням розсіювання енергії вставкою – гасником (8) запишемо:

$$An = 4\gamma l + \frac{4}{3} n \cdot (n-1) \frac{\tau_S^2 \cdot l^3}{E} \left(1-\nu^2\right). \tag{9}$$

Використовуючи у варіаційній нерівності [1] вирази (3) та (4), виконуючи операцію варіювання для функції $l = l(p)$, та міркуючи так, як і у попередньому прикладі, можна отримати нерівність для визначення стабільного розміру тріщини у вставці – гаснику для заданого навантаження p :

$$-4n(n-1) l^2 \tau_s^2 \frac{1-\nu^2}{E} + 2\pi l\, p^2 \frac{1-\nu^2}{E} - 4\gamma \le 0\,. \tag{10}$$

Вид квадратного тричлена стосовно l у відношенні (10) вказує на те, що стабільний для заданого навантаження розмір тріщини не перевищує певної величини, аналогічно до попереднього прикладу. Однак у випадку перевищення довжиною тріщини певної величини, руйнування «гальмується» внаслідок стрімкого (квадратичного) збільшення дисипативних чинників. Як і в попередньому прикладі, з (10) можна отримати вираз граничного навантаження, що викликає раптове руйнування пластини та граничну довжину тріщини, після досягнення якої розвиток тріщини блокується. Графічне представлення результатів, визначених нерівністю (10), подане на Рис. 4.

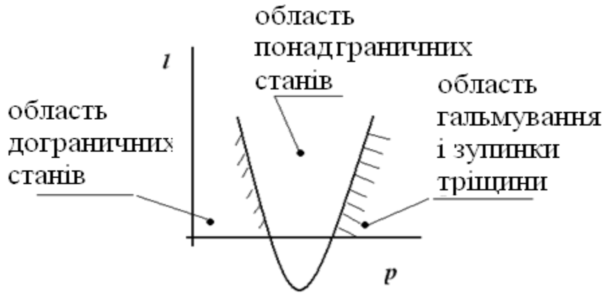

Рис. 4 – Виділення областей рівноваги в просторі параметрів станів шаруватої вставки – гасника

Таке представлення обґрунтовує наявність відповідних областей в просторі станів досліджуваного об’єкту, чого не забезпечують трактування класичних результатів.

Зазначимо, що у наведених вище прикладах використовуються наперед відомі вирази потенційної енергії пружного деформування – з метою спрощення викладок та ілюстрування способу визначення зовнішньої границі тіла, тобто розміру тріщини. Пропонований підхід легко алгоритмізується на загальний випадок, коли необхідно визначати напружено-деформований стан реальної структури у цілому.

Перебіг гідродинамічних явищ, які генерують кавітаційні процеси, супроводжується складними енерготрансформаційними процесами [3]. Енергетичний рівень, який досягається частинками рідини, визначає в значній мірі її агрегатний стан [4]. Тому інтенсивність кавітаційних процесів у цілому та об’єм кавітаційної каверни пов’язуються із низкою енергообмінних процесів, що охоплюють механічну енергію, гідролюмінісценсію, розсіювання акустичних коливань, тепломасообмінні явища тощо. Тому під час дослідження таких явищ у відповідні варіаційні нерівності енергетичного підходу необхідно вводити усі вказані вище енергетичні чинники [5].

Список використаних джерел

1. *Яхно, О. М. Ексергійний* аналіз та метод варіаційних нерівностей в деяких задачах гідромеханіки / О. М. Яхно, О. С. Мачуга // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. «Машинобудування». – 2016. - №3(78). – С. 19 – 25.
2. *Пелех, Б. Л.* Формулювання і розв’язок задач гальмування і зупинки тріщин в композитних середовищах / Б. Л. Пелех // ДАН УРСР. Сер. А: Фізико-математичні та технічні науки. – 1982. – № 6. – С. 46 – 49.
3. *Седов, Л. И. Виды* энергии и их трансформации / Л. И. Седов // Прикладная математика и механика. – 1981. – Вып. 6, т. 45. – С. 964 – 984.
4. *Френкель, Я. И.* Кинетическая теория жидкостей / Я. И. Френкель. – Ленинград:Наука, 1975. – 592 с.
5. *Мачуга, О. С.* Енергетичний підхід у моделюванні кавітаційних процесів / О. С. Мачуга, О. М. Яхно // XX Міжнародна науково-технічна конференція АС ПГП «Промислова гідравліка і пневматика», Київ, 22 – 25 жовтня 2019 р.: матеріали конференції. – Вінниця: ГЛОБУС-ПРЕС, 2019. – С. 47 – 49.