УДК 532,536

# Нелінійна природа температурного граничного шару нестисливої рідини

**Лук'янов[1] П.В.,** канд. фіз.-мат. наук, с. н. с., **Максимов[1] К.Р.,** аспірант
1- Національний авіаційний університет, Київ, Україна

***Анотація***. *Теорію теплопровідності фактично побудовано на першому та другому законах Фур'є. Якщо перший закон має універсальний характер, вказуючи на наявність теплообміну за рахунок градієнту температури, то другий закон не має такої універсальності. Використання сталого коефіцієнту теплопровідності у другому законі Фур'є можливе лише за умови ізотропії та однорідності середовища. Ці умови, очевидно, порушуються в області граничного шару. Представлено нову концепцію, згідно із якою потрібно враховувати змінність у просторі коефіцієнта температуропровідності. Це, перш за все, відноситься до граничного шару – області поблизу границі розділу двох середовищ. Зроблений висновок ґрунтується не тільки на зазначеному вище порушенні, але і на наявності більш ніж одного розв'язку задачі у фізичних координатах, що вказує на взагалі нелінійну природу процесу теплопровідності. В якості прикладу, знайдено другий автомодельний розв'язок задачі теплопровідності рідини між миттєво нагрітою нескінченою площиною та рідиною, що її оточує.*

***Ключові слова***: *нелінійна природа; температурний граничний шар; нестислива рідина*

**Вступ**

Загально відомо, що коли якась система чи процес описуються нелінійним рівнянням (моделлю), то можливі декілька станів цієї системи. Кожний із станів відповідає одному із можливих розв'язків математичної задачі.

Ретельне дослідження ламінарних та турбулентних граничних шарів нестисливої рідини, а також існування певної аналогії (Рейнольдса) призвели до переосмислення існуючої теорії.

**Другий автомодельний розв'язок рівняння теплопровідності за відсутністю конвекції**

Розглянемо задачу нестаціонарної теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\Pr \mathrm{Re}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \; 0 < y < +\infty; \tag{1}$$

$$T(y=0,t) = T_0 H(t), \tag{2}$$

де $H(t)$ -- функція Хевісайда.

Вважаємо температуру на нескінченості рівною нулеві.

Аби перетворити рівняння (1) на автомодельне, перейдемо до автомодельної змінної:

$$\eta = t^{\alpha} y^{\beta} \; . \tag{3}$$

Маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta}\alpha t^{\alpha-1} y^{\beta}, \; \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{d^2 T}{d\eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{d^2 T}{d\eta^2} t^{2\alpha} \beta^2 y^{2\beta-2}. \tag{4}$$

Підставляючи (4) в (1), отримуємо:

$$\alpha t^{\alpha-1} y^{\beta} \frac{dT}{d\eta} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \frac{d^2T}{d\eta^2} t^{2\alpha} \beta^2 y^{2\beta-2}. \qquad (5)$$

Умовами автомодельності (5) є:

$$\alpha - 1 = 2\alpha \quad \text{та} \quad \beta = 2\beta - 2.$$

Звідки $\alpha = -1, \quad \beta = 2$. Отже, автомодельною змінною може буде:

$$\eta = \frac{y^2}{t}. \qquad (6)$$

Вираз (6) для автомодельної змінної цілком природній. Але головне, що він не співпадає із

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{kt}} \quad \text{(або } \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \text{ -- для течії рідини).} \qquad (7)$$

Саме вираз (7) використав Стокс [1] для задачі про миттєве приведення площини у рух зі скінченою швидкістю. Стокс запозичив (7) із теорії теплопровідності Фур’є, якій рівно 200 років. Підстановка (7) в рівняння (1) перетворює останнє на наступне автомодельне [2]:

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0 \qquad (8)$$

із розв’язком

$$f = 1 - erf(\eta).$$

Натомість інший вираз (6) для автомодельної змінної перетворює рівняння (1) на

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} = -\frac{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{4} \frac{d\theta}{d\eta}. \qquad (9)$$

з відповідним розв’язком

$$\theta = 1 - \exp(-\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\,\eta / 4) = 1 - \exp(-\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\, y^2 / 4t) \qquad (10)$$

Хоча (8) і (10) є якісно схожими, все ж це різні розв’язки. Це наводить на цілком логічну думку про нелінійну природу процесу теплопровідності.

**Змінність коефіцієнту теплопровідності (нестисливої рідини)**

Аби з’ясувати нелінійну природу процесу теплопровідності, згадаємо, що основні задачі – це потік тепла від одного, більш нагрітого тіла, до іншого – з меншою температурою. При цьому коефіцієнти теплопровідності різних середовищ є різними. І саме цікаве (складне) відбувається у граничному шарі, де сталість коефіцієнту теплопровідності заперечується законом Фур’є, оскільки порушується просторова ізотропія і однорідність середовища. У тонкому температурному граничному шарі маємо вплив фізичних властивостей одного середовища (наприклад нагрітого твердого тіла) на властивості прилеглого (рідини).

**Висновки**

1. Отримано другий, альтернативний до існуючого, розв’язок у фізичних координатах задачі про нестаціонарну пасивну (відсутній макроскопічний рух середовища) теплопередачу.

2. Аналогія Рейнольдса, а також неоднозначність процесу нестаціонарної теплопередачі, вказують на можливе пояснення невідповідності – несталість коефіцієнту теплопровідності, принаймні у температурному граничному шарі.

**Список літератури**

1. Stokes, G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluids on Motion of Pendulums./ G/G/ Stokes // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1851. Vol. 9

2. Schlichting H. Boundary Layer Theory, seventh ed., McGraw-Hill, New York, 1979.

## Nonlinear nature of the temperature boundary layer of an incompressible fluid

**Lukianov Pavlo, Maksymov Kyryll.**

***Abstract**. The theory of thermal conductivity is actually built on Fourier 's first and second laws. If the first law is universal, indicating the presence of heat exchange due to the temperature gradient, then the second law does not have such universality. The use of a constant thermal conductivity coefficient in Fourier's second law is possible only under the conditions of isotropy and homogeneity of the medium. These conditions are obviously violated in the domain of the boundary layer. A new concept is presented, according to which it is necessary to take into account the spatial variability of the thermal conductivity coefficient. This, first of all, refers to the boundary layer - the domain near the interface of two phases. The conclusion made is not only based on the above-mentioned violation, but also on the presence of more than one solution of the problem in physical coordinates, which indicates the generally nonlinear nature of the heat conduction process. As an example, a second self-similar solution to the problem of thermal conductivity of a liquid between an instantaneously heated infinite plane and the liquid surrounding it was found.*

***Key words:** nonlinear nature; temperature boundary layer; incompressible fluid*