УДК 532,551

Ламінарна течія в'язкої нестисливої рідини внаслідок рівномірного розгону площини

Лук'янов[1] П.В., канд. фіз.-мат. наук, с. н. с.
Сун Лінь[1], аспірант

1-- Національний авіаційний університет, Київ, Україна

Анотація. *В рамках моделі Стокса нестисливої рідини, що має сталу в'язкість, сформульовано та аналітично розв'язано задачу про рівномірний розгін площини із стану спокою із подальшим стаціонарним її рухом. Аналіз отриманого розв'язку вказує на його узгодження, в рамках граничного переходу, із автомодельним розв'язком Стокса, що відповідає миттєвому приведенню площини до руху із скінченою швидкістю. Обидва розв'язки, а також баланс в'язкої дисипації із потужністю сили тертя площини об рідину, вказують на те, що розв'язок задачі ніколи не буде мати вигляд лінійної функції. Проте, зважаючи на відсутність повздовжнього градієнту тиску, саме лінійний розв'язок повинен отримуватись із відповідного рівняння Стокса стаціонарного руху. Вказане протиріччя для опису граничного шару долається шляхом припущення там змінності у просторі коефіцієнта молекулярної дифузії, що є наслідком порушення ізотропії та однорідності середовища.*

Ключеві слова: *ламінарна течія; нестислива рідина; нескінчена площина; граничний шар; змінність у просторі молекулярної дифузії*

Вступ

Не зважаючи на те, що сьогодні практично усі зусилля дослідників напрямлені на вивчення саме турбулентних течій, тим не менше, теорія ламінарного граничного шару ще не є завершеною. Це стає зрозумілим після вивчення робіт Стокса [1-2]. Саме найпростішу задачу про стаціонарний рух площини и течію рідини, що викликана цим рухом, не знайдемо в цих роботах. Спробуємо дати відповідь на це питання. Зрозуміло, що коли площина стаціонарно рухається, то добуток швидкості на в'язке зсувне напруження на поверхні цієї площини є не що інше як потужність, яку передає площина у оточуючий її простір. Якщо рух є стаціонарним, то тоді вказана потужність повинна щомиті кудись діватись. Так і є – вона зникає за рахунок в'язкої дисипації (нагрівання рідини ми не враховуємо):

$$V_x(0)\cdot\tau(0) = -\int_0^\infty \mu \frac{dV_x}{dy}\frac{dV_x}{dy}\,dy = -\tau(0)\int_0^\infty \frac{dV_x}{dy}\,dy = -\tau(0)\left(V_x(\infty) - V_x(0)\right). \qquad (1)$$

При виводі (1) було враховано, що $\mu \frac{dV_x}{dy} = \tau(0) = Const$. Отже, баланс вказаних потужностей можливий лише за умови, що $V_x(\infty) = 0$. Це -- важливий факт, оскільки він заперечує існування поля швидкості у вигляді константи на нескінченості і скрізь.

Рух рідини в наслідок рівномірного розгону площини

Миттєво розігнати будь яке тіло до скінченої швидкості не можливо: потрібна нескінченно велика потужність. Отже, яким би малим не був час розгону, він все одно є скінченим. Позначимо час розгону τ_p. Швидкість рівноприскореного розгону площини $(y=0)$ тоді буде описуватись за законом [3]

$$V_{x|y=0} = U_x(t) = U_0\left[\frac{t}{\tau_p}H(t) - \frac{t-\tau_p}{\tau_p}H\left(t-\tau_p\right)\right]. \qquad (2)$$

В (2) $H(t)$ -- функція Хевісайда.

Друга гранична умова вже згадувалась вище: $V_x(\infty) = 0$.

Розв’язок рівняння Нав’є-Стокса

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \tag{3}$$

із наведеними граничними та початковою умовою має наступний вигляд:

$$V_x(y,t) = \frac{U_0 y}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t \frac{\exp\left[-y^2/4\nu\left(t-\tau_p\right)\right]}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\tau_p} H(\tau) - \frac{\tau-\tau_p}{\tau_p} H\left(\tau-\tau_p\right) \right) d\tau . \tag{4}$$

Інтеграл правої частини (4) зручно розкласти на суму двох наступних інтегралів:

$$I_1(y,t) = \frac{U_0 y}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_0^{\tau_p} \frac{\exp\left[-y^2/4\nu\left(t-\tau_p\right)\right]}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} \frac{\tau}{\tau_p} d\tau \quad \text{та} \quad I_2(y,t) = \frac{U_0 y}{2\sqrt{\nu\pi}} \int_{\tau_p}^{t} \frac{\exp\left[-y^2/4\nu\left(t-\tau_p\right)\right]}{\left(t-\tau\right)^{3/2}} d\tau .$$

Ці інтеграли відповідно дорівнюють $I_1(y,\tau_p) - I_1(y,0)$ та $I_2(y,t) - I_2(y,\tau_p)$, де

$$I_1(y,t) = \frac{U_0 y}{\tau_p 2\nu\sqrt{\pi}} \left\{ 2\sqrt{t-\tau_p} \exp\left[-\frac{1}{4}\frac{y^2}{\left(t-\tau_p\right)}\right] + \left(y\sqrt{\pi} + \frac{2t\sqrt{\pi\nu}}{y} \right) erf\left[\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{\nu\left(t-\tau_p\right)}}\right] \right\}$$

$$I_2(y,t) = \frac{U_0}{\tau_p\sqrt{\nu}} erf\left[\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{\nu\left(t-\tau_p\right)}}\right]. \tag{5}$$

Легко переконатись, що розв’язок (4-5), за умови миттєвого $\left(\tau_p = 0\right)$ приведення площини у рух, збігається із розв’язком Стокса [2,4] -- другим інтегралом (5). Але, як це очевидно, при відсутності другої , -- нерухомої площини, що розташована на скінченій відстані від рухомої, -- розв’язок (5) не буде мати вигляд лінійного розподілу [4]. Константу ми також відкидаємо в силу співвідношення (1) (не може скінченна потужність, за наявності дисипації, приводити весь нескінчений у перпендикулярному до площини напряму півпростір до руху із скінченою сталою швидкістю). Наявна в Інтернеті інформація про дослідження ламінарного граничного шару [5] свідчить, що всі теорії, починаючи із роботи Блазіуса про обтікання плоскої пластини, є не що інше, як гарне наближення параболічного закону, що відповідає руху рідини під дією повздовжнього градієнту тиску і , звичайно, не відповідають руху тіла у рідини без градієнт тиску. Німецькі вчені це вже добре розуміють і тому всі сучасні експерименти роблять не в аеродинамічних трубах з наявністю повздовжнього градієнту тиску, а на літаках – прямий експеримент.

Висновки

1. Розподіл швидкості нестисливої рідини у півпросторі, що зумовлено стаціонарним рухом нескінченої площини, неможна отримати як граничний перехід у часі в відповідних розв’язків нестаціонарного руху.
2. Теорії Блазіуса, Кармана, Польгаузена та інших [5] практично (точність 1%-2%) співпадають із параболічним законом руху рідини під дією повздовжнього градієнту тиску і тому гарно узгоджуються саме із експериментами обтікання у аеродинамічних трубах.

3. Переносити результати експериментів (градієнтна течія) на реальний рух тіла у рідині (без градієнтна течія) не є коректним. Про це також свідчить різниця у два рази товщини граничного ламінарного шару двох взаємно обернених задач: обертання нескінченого диску та обертання рідини над нерухомою поверхнею [4].
4. Як показали наші дослідження, вказана невідповідність є фізичною, оскільки Стокс вивів свої рівняння, використовуючи теорію Нав'є та Фур'є де чітко оговорена просторова ізотропія середовища як підстава для сталості відповідних коефіцієнтів (і з нею фізичних властивостей). Яка ж просторова ізотропія середовища може мати місце на границі розділу зовсім різних фаз – рідкої та твердої. Навіть у твердих тілах є поняття про при поверхневий граничний шар, де фізичні властивості середовища відрізняються від їх аналогів всередині тіла – на відстані від поверхні.
5. Запропонований нами підхід не є, насправді, чимось новим в гідромеханіці: сучасний підхід у вигляді прямого чисельного моделювання не поділяє течію на ламінарну (малі числа Рейнольдса) чи турбулентну (великі числа Рейнольдса) і використовує загальний вигляд рівнянь Нав'є-Стокса, де в'язкість в цілому є функцією координат і часу, тобто змінна. Це остаточно вказує на вірність нашої точки зору, яка народилась шляхом порівняння отриманих нами раніше результатів із сучасними дослідженнями, опублікованими в перших за рейтингом журналах світу.

Подяка

Автори дуже вдячні за конструктивну критику розуміння наших досягнень дійсному члену чотирьох Академій наук, професору Чарльзу Меневіу (Prof. Charles Meneveau, John Hopkins University, USA)

Список літератури

1. Stokes, G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and the equilibrium and motion of elastic solids. Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1845. --Vol. 8, p .287-305.
2. Stokes, G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluids on Motion of Pendulums./ G/G/ Stokes // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1851. -- Vol. 9
3. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. : Учеб. Пособие. – К. : Вища шк. , 1989. – 184 с.
4. Schlichting H. Boundary Layer Theory, seventh ed., McGraw-Hill, New York, 1979.
5. Abdul-Ghafour Q.A. A general velocity profile for a laminar boundary layer over flat plate with zero incidence. // Journal of Engineering. – 2011-- V. 17.

Laminar flow in a viscous incompressible fluid as a result of uniform plane acceleration

Lukianov P.V., Song L.

Abstract. *Within the framework of the Stokes model of an incompressible fluid with a constant viscosity, the problem of uniform acceleration of a plane from rest with its subsequent stationary motion is formulated and analytically solved. The analysis of the obtained solution indicates its agreement, within the limiting transition, with the Stokes self-similar solution, which corresponds to the instantaneous bringing of the plane to motion with a finite velocity. Both solutions, as well as the balance of viscous dissipation with the power of the friction force of the plane on the fluid, indicate that the solution of the problem will never take the form of a linear function. However, given the absence of a longitudinal pressure gradient, it is the linear solution that must be obtained from the corresponding Stokes equation of steady motion. This contradiction for the description of the boundary layer is overcome by assuming a spatial variability of the molecular diffusion coefficient, which is a consequence of the violation of isotropy and homogeneity of the medium.*

Keywords: laminar flow; incompressible liquid; infinite plane; boundary layer; space variability of molecular diffusion